



PRISMA ODS
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA
SOBRE DESARROLLO SOSTENIBLE
ISSN: 3072-8452

**LOS TRES PRIMEROS
GRUPOS DE FUNCIONES
DE FRASES: ESTRUCTURA
ALGEBRAICA, SIMETRÍA
Y REALIZACIONES
GEOMÉTRICAS**

*THE FIRST THREE PHRASE FUNCTION
GROUPS: ALGEBRAIC STRUCTURE,
SYMMETRY, AND GEOMETRIC
REALIZATIONS*

AUTOR

**FERNANDO RICARDO
GONZÁLEZ DÍAZ**

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
CIENCIA APLICADA Y
TECNOLOGÍA AVANZADA
(CICATA), INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL (IPN)
MÉXICO

Los Tres Primeros Grupos de Funciones de Frases: Estructura Algebraica, Simetría y Realizaciones Geométricas

The First Three Phrase Function Groups: Algebraic Structure, Symmetry, and Geometric Realizations

Fernando Ricardo González Díaz

fgonzalez33@outlook.com

<https://orcid.org/0009-0009-9704-1119>

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), Instituto
Politécnico Nacional (IPN)
Ciudad de México – México

Artículo recibido: 14/07/2026

Aceptado para publicación: 16/08/2026

Conflictos de Intereses: Ninguno que declarar

RESUMEN

Este artículo desarrolla los tres primeros grupos de funciones de frase, $FR(1)$, $FR(2)$ y $FR(3)$, a partir de la organización combinatoria de letras en una frase mediante matrices asociadas y matrices restringidas. La jerarquía comienza con el grupo trivial $FR(1)$ y continúa con el grupo cíclico $FR(2) \cong \mathbb{Z}_2$. El primer caso no abeliano surge en el grupo de funciones de frase $FR(3)$, cuyas seis funciones de frase actúan como rotaciones y reflexiones de un triángulo equilátero. Se demuestra que $FR(3) \cong D_3 \cong S_3$, estableciendo conexiones directas entre transformaciones de frase, simetría diedral clásica y grupos de permutación. La estructura de subgrupos de $FR(3)$ se caracteriza completamente, incluyendo el subgrupo de rotación, los subgrupos de reflexión y el retículo de subgrupos correspondiente. Además, se demuestra que la conjugación mediante funciones de frase de reflexión transforma las rotaciones en sus inversas, reproduciendo el comportamiento geométrico clásico de las reflexiones en grupos diedrales. Estos resultados establecen conexiones naturales entre el lenguaje, el álgebra, la geometría y la simetría visual, y motivan el estudio de grupos de funciones de frase de orden superior.

Palabras clave: grupos de funciones de frases, grupos diedrales, grupos simétricos, realizaciones geométricas

ABSTRACT

This This paper develops the first three phrase function groups, $FR(1)$, $FR(2)$, and $FR(3)$, from the combinatorial organization of letters in a phrase through associated and restricted matrices. The hierarchy begins with the trivial group $FR(1)$ and continues with the cyclic group $FR(2) \cong Z_2$. The first nonabelian instance arises in the phrase function group $FR(3)$, whose six phrase functions act as rotations and reflections of an equilateral triangle. It is shown that $FR(3) \cong D_3 \cong S_3$, establishing direct connections between phrase transformations, classical dihedral symmetry, and permutation groups. The subgroup structure of $FR(3)$ is completely characterized, including the rotation subgroup, the reflection subgroups, and the corresponding subgroup lattice. In addition, conjugation by reflection phrase functions is shown to send rotations to their inverses, reproducing the classical geometric behavior of reflections in dihedral groups. These results establish natural connections between language, algebra, geometry, and visual symmetry, and motivate the study of higher-order phrase function groups.

Keywords: phrase function groups, dihedral groups, symmetric groups, geometric realizations

INTRODUCCIÓN

La simetría ocupa un lugar central en las matemáticas debido a sus profundas conexiones con el álgebra, la geometría, la combinatoria y numerosas áreas de las ciencias naturales (Armstrong, 1988; Weyl, 1952). Los grupos de simetría proporcionan un lenguaje unificador para describir transformaciones, invariancias y estructuras geométricas, desempeñando un papel fundamental tanto en las matemáticas puras como en sus aplicaciones en física, química, informática y arte matemático (Coxeter, 1969; Carter, 2009).

Entre los ejemplos más importantes se encuentran los grupos cíclicos, los grupos diedrales y los grupos simétricos, los cuales describen respectivamente simetrías rotacionales, simetrías de polígonos regulares y permutaciones de conjuntos finitos (Fraleigh, 2003; Rotman, 1995; Gallian, 2021). En particular, el grupo diedral del triángulo equilátero constituye uno de los primeros ejemplos no abelianos estudiados en teoría de grupos y representa un puente natural entre estructuras algebraicas y realizaciones geométricas (Armstrong, 1988; Carter, 2009).

Recientemente, González Díaz y García Salcedo (2024) introdujeron una construcción combinatoria basada en el conteo de letras de una frase mediante matrices asociadas y matrices restringidas, estableciendo un nuevo marco para el estudio de transformaciones sintagmáticas y sus propiedades algebraicas. Posteriormente, González Díaz (2025) extendió esta idea mediante la introducción del grupo de funciones de frase $FR(4)$, mostrando su relación con el grupo diedral del cuadrado y diversas aplicaciones visuales y geométricas.

En el presente trabajo se estudian los tres primeros grupos de funciones de frase, $FR(1)$, $FR(2)$ y $FR(3)$, contruidos a partir de frases formadas por letras distintas y de las matrices asociadas a dichas frases. La jerarquía comienza con el grupo trivial $FR(1)$ y continúa con el grupo cíclico $FR(2)$, isomorfo al grupo Z_2 . El primer caso no abeliano aparece en el grupo de funciones de frase $FR(3)$, cuyas seis funciones actúan como rotaciones y reflexiones de un triángulo equilátero.

Uno de los resultados principales de este trabajo es la demostración de que $FR(3) \cong D_3 \cong S_3$, estableciendo conexiones directas entre transformaciones de frases, simetría diedral clásica y grupos de permutación.

Asimismo, se caracteriza completamente la estructura de subgrupos de $FR(3)$, incluyendo el subgrupo de rotaciones, los subgrupos de reflexión y el correspondiente retículo de subgrupos. Además, se demuestra que la conjugación mediante funciones de reflexión transforma las rotaciones en sus inversas, reproduciendo el comportamiento geométrico clásico de las reflexiones en grupos diedrales.

Los grupos estudiados admiten realizaciones geométricas naturales. La transición desde un único vértice hasta un segmento y finalmente un triángulo equilátero refleja el incremento gradual de complejidad algebraica y proporciona una interpretación geométrica de las propiedades de simetría de los grupos de funciones de frase.

Las principales contribuciones de este trabajo son las siguientes:

- La construcción explícita de los grupos $FR(1)$, $FR(2)$ y $FR(3)$ a partir de matrices asociadas y matrices restringidas.
- La demostración de que $FR(3)$ es un grupo no abeliano isomorfo al grupo diedral D_3 y al grupo simétrico S_3 .
- La caracterización de la acción de las funciones de reflexión sobre el subgrupo de rotaciones mediante conjugación por inversión.
- La realización geométrica de las simetrías de los grupos de funciones de frase mediante configuraciones geométricas elementales y retículos de subgrupos.

Los conceptos fundamentales de grupos, subgrupos, homomorfismos e isomorfismos utilizados a lo largo del trabajo pueden consultarse en textos clásicos de álgebra abstracta (Artin, 2011; Dummit y Foote, 2004).

El artículo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 introduce el grupo $FR(1)$. La Sección 3 estudia el grupo $FR(2)$. La Sección 4 desarrolla el grupo de funciones de frase $FR(3)$ y sus propiedades algebraicas. La Sección 5 analiza la estructura de subgrupos de $FR(3)$. Finalmente, la Sección 6 presenta diversas realizaciones clásicas e interpretaciones geométricas de los grupos de funciones de frase.

METODOLOGÍA

La presente investigación es de naturaleza teórica y deductiva y se desarrolla dentro del marco de la teoría de grupos, la combinatoria y la geometría discreta.

La metodología utilizada consiste en la construcción de matrices asociadas y matrices restringidas derivadas de frases formadas por letras distintas pertenecientes a un alfabeto finito. A partir de estas estructuras se definen funciones de frase y sus composiciones, permitiendo construir los grupos de funciones de frase $FR(1)$, $FR(2)$ y $FR(3)$.

Posteriormente se estudian las propiedades algebraicas de dichos grupos mediante herramientas clásicas de teoría de grupos, incluyendo el análisis de axiomas de grupo, órdenes de elementos, generadores, subgrupos e isomorfismos con grupos clásicos.

Finalmente, se desarrollan realizaciones geométricas de las funciones de frase mediante puntos, segmentos y triángulos equiláteros, proporcionando una interpretación visual de las estructuras algebraicas obtenidas.

El grupo de funciones de frase $FR(1)$

Sea $f = l_1$, donde $l_1 \in \Sigma$, una frase formada por una única letra perteneciente a un alfabeto finito Σ .

La matriz restringida correspondiente está dada por $M_f = [l_1]$, la cual es una matriz de dimensión 1×1 y genera la única función de frase posible $f_1(f) = l_1$.

Desde el punto de vista geométrico, la matriz restringida M_f admite una realización natural como un único punto identificado con la letra l_1 , tal como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Realización geométrica de la matriz restringida M_f correspondiente a la función de frase $f_1(f) = l_1$.



Fuente: elaboración propia.

Definición 1. Sea $FR(1) = \{f_1\}$, el conjunto de funciones de frase asociadas a frases de longitud uno, donde $f_1(f) = l_1$. La operación binaria en $FR(1)$ está dada por la composición de funciones de frase.

Teorema 1. El conjunto de funciones de frase $FR(1)$, dotado de la operación composición, forma un grupo de orden uno.

Demostración. Dado que $FR(1)$ contiene un único elemento, la asociatividad se satisface inmediatamente. Además, $(f_1 \circ f_1)(f) = f_1(f_1(f)) = f_1(f)$, por lo que f_1 actúa simultáneamente como elemento identidad y como su propio inverso.

Por consiguiente, $FR(1)$ satisface todos los axiomas de grupo y constituye el grupo trivial de orden uno. $\square$

Observación 1. El grupo $FR(1)$ constituye el caso base para la construcción de grupos de funciones de frase de orden superior.

Desde el punto de vista geométrico, $FR(1)$ puede interpretarse como el grupo de simetrías de un único punto, el cual permanece invariante bajo cualquier transformación permitida dentro del sistema considerado. Esta interpretación proporciona el primer nivel de la jerarquía geométrica que posteriormente conduce al segmento asociado a $FR(2)$ y al triángulo equilátero asociado a $FR(3)$.

El grupo de funciones de frase $FR(2)$

Sea $f = l_1 l_2$, donde $l_1 \neq l_2$ y $l_1, l_2 \in \Sigma$, una frase de longitud dos sobre un alfabeto finito Σ .

La matriz asociada $M(f)$ y la matriz restringida M_f , introducidas en González Díaz y García Salcedo (2024), están dadas por

$$M(f) = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_1 & l_2 & l_1 \\ l_2 & l_1 & l_2 & l_1 & l_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_f = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_1 \end{bmatrix}$$

Sean $R_1 = [l_1 \ l_2]$ y $R_2 = [l_2 \ l_1]$ los vectores fila de la matriz restringida M_f . Las frases correspondientes son $f_{R_1} = l_1 l_2$ y $f_{R_2} = l_2 l_1$.

Para frases de longitud dos, la matriz restringida inversa no genera funciones de frase adicionales, ya que sus filas coinciden con las de M_f salvo por una permutación de sus elementos. En consecuencia, definimos las funciones de frase $f_1(f) = l_1 l_2$ y $f_2(f) = l_2 l_1$.

Desde el punto de vista geométrico, la matriz restringida M_f admite una realización natural como un segmento cuyos extremos corresponden a las letras l_1 y l_2 , tal como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Realización geométrica de la matriz restringida M_f asociada a la función de frase $f_1(f) = l_1 l_2$.



Fuente: elaboración propia.

Definición 2. Sea $FR(2) = \{f_1, f_2\}$ el conjunto de funciones de frase asociadas a frases de longitud dos con letras distintas, dotado de la composición de funciones como operación binaria.

Teorema 2. El conjunto de funciones de frase $FR(2) = \{f_1, f_2\}$ dotado de la operación composición forma un grupo de orden dos.

Demostración. Dado que la composición de funciones es asociativa, únicamente resta verificar la existencia del elemento identidad y de los inversos.

Además, $f_1 \circ f_1 = f_1$ y $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = f_2$, por lo que f_1 actúa como elemento identidad.

Asimismo, $f_2 \circ f_2 = f_1$, lo que implica que $f_1^{-1} = f_1$ y $f_2^{-1} = f_2$.

Por consiguiente, $FR(2)$ satisface todos los axiomas de grupo y constituye un grupo de orden dos. $\square$

La tabla de composición de $FR(2)$ se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Tabla de composición del grupo de funciones de frase $FR(2)$

$\circ$	f_1	f_2
f_1	f_1	f_2
f_2	f_2	f_1

Fuente: elaboración propia.

Teorema 3. El grupo de funciones de frase $FR(2)$ es isomorfo al grupo cíclico de orden dos:

$$FR(2) \cong Z_2.$$

Demostración. Sea $Z_2 = \{0,1\}$ con la suma módulo 2. Definimos la aplicación

$\varphi : FR(2) \rightarrow Z_2$ mediante $\varphi(f_1) = 0$ y $\varphi(f_2) = 1$.

La aplicación φ es inyectiva, ya que elementos distintos de $FR(2)$ poseen imágenes distintas.

Además, φ es sobreyectiva porque todo elemento de Z_2 es imagen de algún elemento de $FR(2)$.

Para verificar que φ es un homomorfismo, basta comprobar que

$$\varphi(f_i \circ f_j) = \varphi(f_i) + \varphi(f_j) \pmod{2}$$

para todos $f_i, f_j \in FR(2)$, lo cual se deduce directamente de la tabla de composición de $FR(2)$.

Por lo tanto, φ es un isomorfismo de grupos y, en consecuencia, $FR(2) \cong Z_2$. $\square$

Observación 2. El grupo $FR(2)$ admite una realización geométrica natural como el grupo de simetrías de un segmento. La función de frase f_1 corresponde a la identidad, mientras que f_2 corresponde a la reflexión que intercambia los extremos del segmento. Esta construcción constituye la transición natural hacia la estructura no abeliana del grupo $FR(3)$, asociado a las simetrías del triángulo equilátero.

El grupo de funciones de frase $FR(3)$

Sea $f = l_1 l_2 l_3$, una frase de longitud tres sobre el alfabeto finito Σ , donde l_1, l_2 y $l_3 \in \Sigma$ son letras distintas dos a dos.

La matriz asociada $M(f)$, la matriz restringida M_f y la matriz restringida inversa $-M_f$, introducidas en González Díaz y García Salcedo (2024), están dadas por

$$M(f) = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_1 & l_2 \\ l_3 & l_1 & l_2 & l_3 & l_1 \\ l_2 & l_3 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \quad M_f = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_3 & l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 & l_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -M_f = \begin{bmatrix} l_3 & l_2 & l_1 \\ l_2 & l_1 & l_3 \\ l_1 & l_3 & l_2 \end{bmatrix}$$

Las filas de la matriz restringida M_f definen las funciones de frase de rotación $f_1(f) = l_1l_2l_3$, $f_2(f) = l_3l_1l_2$, y $f_3(f) = l_2l_3l_1$, mientras que las filas de la matriz restringida inversa $-M_f$ definen las correspondientes funciones de frase de reflexión $-f_1(f) = l_3l_2l_1$, $-f_2(f) = l_2l_1l_3$, y $-f_3(f) = l_1l_3l_2$.

Definición 3. El grupo de funciones de frase asociado a frases de longitud tres se define por

$$FR(3) = \{f_1, f_2, f_3, -f_1, -f_2, -f_3\},$$

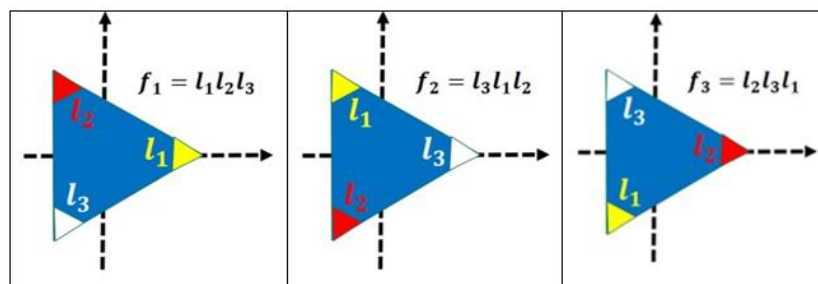
dotado de la composición de funciones de frase como operación binaria.

3.1. Realización geométrica de las funciones de frase de rotación

Las funciones de frase de rotación se obtienen asignando las letras de la frase $f = l_1l_2l_3$ a los vértices de un triángulo equilátero en sentido antihorario.

Las funciones de frase f_1 , f_2 y f_3 corresponden respectivamente a rotaciones de 0° , 120° y 240° , tal como se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Realización geométrica de las funciones de frase de rotación f_1 , f_2 y f_3 como rotaciones de un triángulo equilátero de 0° , 120° y 240° , respectivamente



Fuente: elaboración propia.

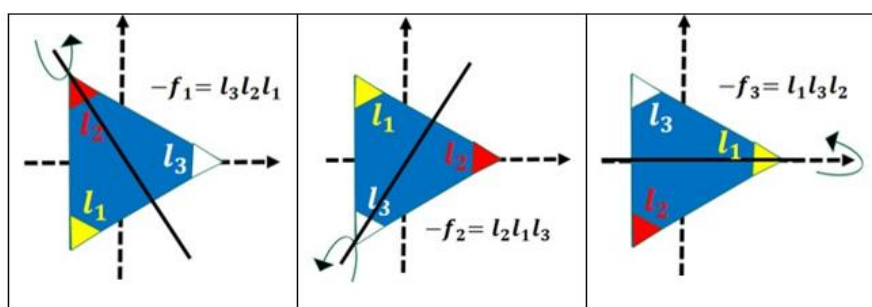
La Figura 4 ilustra la acción cíclica de las funciones de frase de rotación sobre las letras de la frase y sobre el triángulo equilátero subyacente.

Realización geométrica de las funciones de frase de reflexión

Las funciones de frase de reflexión se obtienen asignando las letras de la frase a los vértices de un triángulo equilátero en sentido horario.

Las funciones de frase $-f_1$, $-f_2$ y $-f_3$ corresponden respectivamente a reflexiones respecto a las tres bisectrices internas del triángulo equilátero, tal como se muestra en la Figura 4.

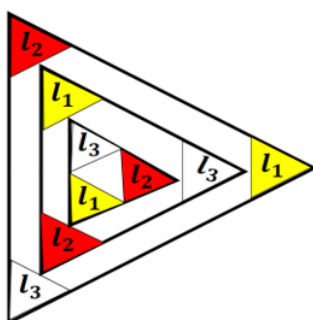
Figura 4. Realización geométrica de las funciones de frase de reflexión $-f_1$, $-f_2$ y $-f_3$ como reflexiones de un triángulo equilátero respecto a sus bisectrices internas.



Fuente: elaboración propia.

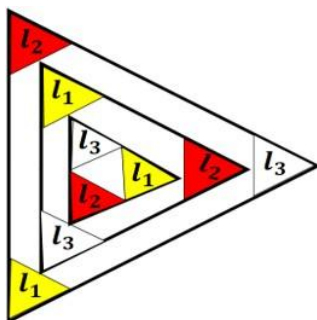
La Figura 6 ilustra la acción de las funciones de frase de reflexión sobre las letras de la frase y sobre el triángulo equilátero subyacente.

Figura 5. Diagrama triangular anidado que ilustra la acción cíclica de las funciones de frase de rotación f_1 , f_2 y f_3 .



Fuente: elaboración propia.

Figura 6. Diagrama triangular anidado que ilustra la acción de las funciones de frase de reflexión $-f_1$, $-f_2$ y $-f_3$.



Fuente: elaboración propia.

Propiedades estructurales de $FR(3)$

Teorema 4. El conjunto $FR(3)$ forma un grupo bajo la composición de funciones de frase.

Demostración. Los axiomas de grupo se verifican de la siguiente manera.

Clausura. La Tabla 2 muestra que la composición de cualesquiera dos elementos de $FR(3)$ pertenece nuevamente a $FR(3)$. Por lo tanto, $FR(3)$ es cerrado bajo composición.

Asociatividad. La composición de funciones de frase es asociativa, ya que la composición de funciones es asociativa.

Elemento identidad. La función de frase f_1 actúa como elemento identidad, pues para todo $g \in FR(3)$ se tiene $f_1 \circ g = g$ y $g \circ f_1 = g$.

Inversos. Los inversos de las funciones de frase de rotación son

$$f_1^{-1} = f_1, f_2^{-1} = f_3, \text{ y } f_3^{-1} = f_2, \text{ ya que } f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 = f_1.$$

De manera similar, cada función de frase de reflexión es una involución:

$$(-f_1)^{-1} = -f_1, (-f_2)^{-1} = -f_2, \text{ y } (-f_3)^{-1} = -f_3, \text{ puesto que } (-f_i) \circ (-f_i) = f_1, \text{ para } i = 1, 2 \text{ y } 3.$$

Por consiguiente, todo elemento de $FR(3)$ posee inverso en $FR(3)$.

En consecuencia, $FR(3)$ satisface los axiomas de grupo y forma un grupo bajo la composición de funciones de frase. $\square$

Tabla 2. Tabla de Cayley del grupo de funciones de frase $FR(3)$ bajo la operación composición

$\circ$	f_1	f_2	f_3	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$
f_1	f_1	f_2	f_3	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$
f_2	f_2	f_3	f_1	$-f_3$	$-f_1$	$-f_2$
f_3	f_3	f_1	f_2	$-f_2$	$-f_3$	$-f_1$
$-f_1$	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$	f_1	f_2	f_3
$-f_2$	$-f_2$	$-f_3$	$-f_1$	f_3	f_1	f_2
$-f_3$	$-f_3$	$-f_1$	$-f_2$	f_2	f_3	f_1

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 2 muestra que la composición de dos funciones de frase de rotación es nuevamente una función de frase de rotación, mientras que la composición de dos funciones de frase de reflexión produce también una función de frase de rotación.

Por otra parte, la composición de una función de frase de rotación y una función de frase de reflexión, en cualquiera de los dos órdenes posibles, produce siempre una función de frase de reflexión.

Estas propiedades reproducen exactamente el comportamiento algebraico de las simetrías clásicas del triángulo equilátero y anticipan la estrecha relación existente entre el grupo de funciones de frase $FR(3)$ y el grupo diedral D_3 .

Teorema 5. En el grupo de funciones de frase $FR(3)$, la composición de dos funciones de frase de rotación es una función de frase de rotación y la composición de dos funciones de frase de reflexión es también una función de frase de rotación.

Demostración. Consideramos dos casos.

Caso 1: Composición de rotaciones. De la Tabla 2 se observa que la composición de cualesquiera dos elementos de $R = \{f_1, f_2, f_3\}$ pertenece nuevamente a $R = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Por ejemplo, $f_2 \circ f_2 = f_3$, $f_2 \circ f_3 = f_1$, y $f_3 \circ f_3 = f_2$.

Por lo tanto, la composición de dos funciones de frase de rotación es nuevamente una función de frase de rotación.

Caso 2: Composición de reflexiones. De manera similar, la Tabla 2 muestra que

$$(-f_i) \circ (-f_j) \in \{f_1, f_2, f_3\}, \text{ para } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Por consiguiente, la composición de dos funciones de frase de reflexión es una función de frase de rotación.

Por lo tanto, la composición de dos funciones de frase de rotación es una función de frase de rotación y la composición de dos funciones de frase de reflexión es también una función de frase de rotación. $\square$

Teorema 6. En el grupo de funciones de frase $FR(3)$, la composición de una función de frase de rotación y una función de frase de reflexión, en cualquiera de los dos órdenes posibles, es siempre una función de frase de reflexión.

Demostración. La Tabla 2 muestra que $f_i \circ (-f_j) \in \{-f_1, -f_2, -f_3\}$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

De manera similar, $(-f_j) \circ f_i \in \{-f_1, -f_2, -f_3\}$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Por lo tanto, la composición de una función de frase de rotación y una función de frase de reflexión, en cualquiera de los dos órdenes posibles, es nuevamente una función de frase de reflexión. $\square$

Corolario 1. Sean $R = \{f_1, f_2, f_3\}$ y $S = \{-f_1, -f_2, -f_3\}$ los conjuntos de funciones de frase de rotación y reflexión, respectivamente. Entonces la composición en $FR(3)$ satisface

$$R \circ R = R, \quad R \circ S = S, \quad S \circ R = S, \quad \text{y} \quad S \circ S = R.$$

Demostración. La igualdad $R \circ R = R$ se sigue del hecho de que la composición de dos funciones de frase de rotación es nuevamente una función de frase de rotación.

Asimismo, $R \circ S = S$ y $S \circ R = S$ se deducen del hecho de que la composición de una función de frase de rotación y una función de frase de reflexión, en cualquiera de los dos órdenes posibles, es nuevamente una función de frase de reflexión.

Finalmente, $S \circ S = R$ se sigue del hecho de que la composición de dos funciones de frase de reflexión es una función de frase de rotación.

Por lo tanto, las relaciones anteriores son válidas en $FR(3)$. $\square$

Teorema 7. El grupo de funciones de frase $FR(3)$ es no abeliano.

Demostración. Para demostrar que $FR(3)$ es no abeliano, basta exhibir dos elementos cuyas composiciones dependan del orden de los factores.

De la Tabla 2 se obtiene $(-f_1) \circ (-f_3) = f_3$, mientras que $(-f_3) \circ (-f_1) = f_2$. Como $f_2 \neq f_3$, se concluye que $(-f_1) \circ (-f_3) \neq (-f_3) \circ (-f_1)$.

Por lo tanto, la composición en $FR(3)$ no es conmutativa y, en consecuencia, el grupo $FR(3)$ es no abeliano. $\square$

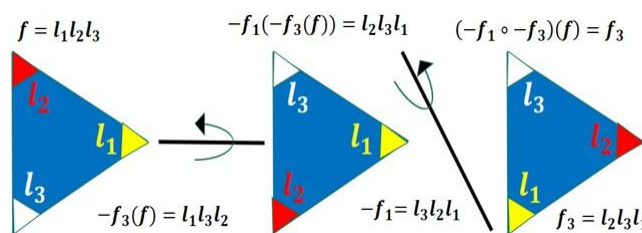
Este comportamiento constituye uno de los ejemplos más elementales de grupo finito no abeliano (Herstein, 1975).

Observación 4. La no conmutatividad de $FR(3)$ admite una interpretación geométrica natural. Las composiciones $(-f_1) \circ (-f_3)$ y $(-f_3) \circ (-f_1)$ corresponden a realizar dos reflexiones sucesivas del triángulo equilátero en diferente orden.

Dado que la composición de dos reflexiones es una rotación cuyo ángulo depende del orden en que se realizan las reflexiones, ambas composiciones producen rotaciones distintas, concretamente f_3 y f_2 , respectivamente; véanse las Figuras 7 y 8.

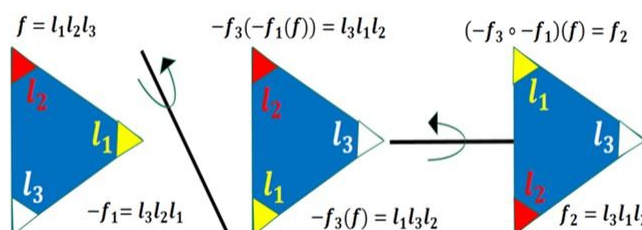
Esta interpretación geométrica pone de manifiesto la estrecha relación existente entre las funciones de frase y las simetrías clásicas del triángulo equilátero.

Figura 7. Realización geométrica de la composición $-f_1 \circ -f_3$. Dos reflexiones sucesivas del triángulo equilátero producen la rotación correspondiente a la función de frase f_3



Fuente: elaboración propia.

Figura 8. Realización geométrica de la composición $-f_3 \circ -f_1$. Dos reflexiones sucesivas del triángulo equilátero producen la rotación correspondiente a la función de frase f_2



Fuente: elaboración propia.

Observación 5. Los elementos de $FR(3)$ poseen los mismos órdenes que las simetrías correspondientes del triángulo equilátero.

La función de frase identidad f_1 tiene orden uno.

Las funciones de frase de rotación no triviales tienen orden tres: $f_2^3 = f_3^3 = f_1$.

Cada función de frase de reflexión es una involución y, por tanto, posee orden dos:

$$(-f_1)^2 = (-f_2)^2 = (-f_3)^2 = f_1.$$

Geométricamente, tres rotaciones sucesivas devuelven el triángulo equilátero a su posición original, mientras que dos reflexiones sucesivas respecto al mismo eje restauran la configuración inicial.

La distribución de órdenes de los elementos de $FR(3)$ coincide exactamente con la del grupo de simetrías del triángulo equilátero, es decir, un elemento identidad, dos rotaciones de orden tres y tres reflexiones de orden dos (Armstrong, 1988; Carter, 2009).

Teorema 8. El grupo de funciones de frase $FR(3)$ es isomorfo al grupo diedral D_3 .

Demostración. El grupo $FR(3)$ consta de los seis elementos $FR(3) = \{f_1, f_2, f_3, -f_1, -f_2, -f_3\}$, donde f_1, f_2 y f_3 son funciones de frase de rotación, mientras que $-f_1, -f_2$ y $-f_3$ son funciones de frase de reflexión.

De manera análoga, el grupo diedral D_3 está formado por las seis simetrías del triángulo equilátero: tres rotaciones y tres reflexiones (Armstrong, 1988; Carter, 2009).

Sea r una rotación de 120° y sea s una reflexión. Entonces, $D_3 = \langle r, s \mid r^3 = e, s^2 = e, sr = r^{-1}s \rangle$. Definimos la aplicación $\varphi : FR(3) \rightarrow D_3$ mediante

$$\varphi(f_1) = e, \varphi(f_2) = r, \varphi(f_3) = r^2, \varphi(-f_1) = s, \varphi(-f_2) = sr, \text{ y } \varphi(-f_3) = sr^2.$$

La aplicación φ es biyectiva, ya que establece una correspondencia uno a uno entre las tres funciones de frase de rotación y las tres rotaciones del triángulo equilátero, así como entre las tres funciones de frase de reflexión y las tres reflexiones del triángulo.

Además, $\varphi(g \circ h) = \varphi(g)\varphi(h)$ para todos $g, h \in FR(3)$, lo cual se deduce directamente de la Tabla 2 y de la tabla de multiplicación del grupo diedral D_3 .

Por lo tanto, φ es un isomorfismo de grupos y, en consecuencia, $FR(3) \cong D_3$. $\square$

Corolario 2. El grupo de funciones de frase $FR(3)$ es isomorfo al grupo simétrico S_3 .

Demostración. Del Teorema 8 se tiene que $FR(3) \cong D_3$.

Por otra parte, es un resultado clásico de la teoría de grupos que el grupo diedral D_3 , correspondiente al grupo de simetrías del triángulo equilátero, es isomorfo al grupo simétrico S_3 de todas las permutaciones de tres elementos (Armstrong, 1988; Carter, 2009; Fraleigh, 2003).

Por lo tanto, $D_3 \cong S_3$. Aplicando la transitividad de los isomorfismos se obtiene $FR(3) \cong S_3$. $\square$

Teorema 9. La función de frase de rotación f_2 tiene orden tres. Equivalentemente, $f_2^3 = f_1$.

Demostración. Sea $f = l_1 l_2 l_3$ una frase arbitraria de longitud tres. Aplicando la función de frase de rotación f_2 una vez se obtiene $f_2(f) = l_3 l_1 l_2$.

Aplicando f_2 una segunda vez se obtiene $f_2^2(f) = f_2(l_3 l_1 l_2) = l_2 l_3 l_1$.

Aplicando f_2 una tercera vez obtenemos $f_2^3(f) = f_2(l_2 l_3 l_1) = l_1 l_2 l_3 = f_1(f)$.

Puesto que la frase $f = l_1 l_2 l_3$ fue arbitraria, se concluye que $f_2^3 = f_1$. Geométricamente, la función de frase f_2 corresponde a una rotación del triángulo equilátero de 120° .

Por consiguiente, tres aplicaciones sucesivas producen una rotación total de $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$, la cual devuelve el triángulo a su configuración original representada por la función identidad f_1 . $\square$

Teorema 10. El grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$ es generado por la función de frase de rotación f_2 y la función de frase de reflexión $-f_1$. En particular,

$$FR(3) = \langle f_2, -f_1 \rangle = \{f_1, f_2, f_3, -f_1, -f_2, -f_3\},$$

donde las potencias y productos se toman respecto a la composición de funciones de frase.

Demostración. Del teorema anterior sabemos que $f_2^3 = f_1$ y, por consiguiente, el subgrupo cíclico generado por f_2 es $\langle f_2 \rangle = \{f_1, f_2, f_2^2\} = \{f_1, f_2, f_3\}$, el cual contiene precisamente las tres funciones de frase de rotación.

Para obtener las funciones de frase de reflexión, componemos estas rotaciones con la función de frase de reflexión $-f_1$. Utilizando la tabla de composición de $FR(3)$, obtenemos

$$f_1 \circ (-f_1) = -f_1, f_2 \circ (-f_1) = -f_3, \text{ y } f_2^2 \circ (-f_1) = f_3 \circ (-f_1) = -f_2.$$

Por lo tanto, $\{-f_1, -f_2, -f_3\} \subseteq \langle f_2, -f_1 \rangle$.

Combinando las funciones de frase de rotación y reflexión concluimos que

$$\langle f_2, -f_1 \rangle = \{f_1, f_2, f_3, -f_1, -f_2, -f_3\} = FR(3).$$

Por consiguiente, $FR(3) = \langle f_2, -f_1 \rangle$, y en consecuencia el grupo de funciones de frase $FR(3)$ es generado por f_2 y $-f_1$. $\square$

Corolario 3. El grupo de funciones de frase $FR(3)$ puede ser generado por la función de frase de rotación f_2 de orden tres junto con cualquier función de frase de reflexión de orden dos. Más precisamente, $FR(3) = \langle f_2, -f_1 \rangle = \langle f_2, -f_2 \rangle = \langle f_2, -f_3 \rangle$.

Equivalentemente, $FR(3)$ es generado por una función de frase de rotación f_2 que satisface $f_2^3 = f_1$ y por cualquier función de frase de reflexión $-f_j$ que satisface $(-f_j)^2 = f_1$, con $j \in \{1, 2, 3\}$, donde los exponentes denotan composición repetida de funciones de frase.

Demostración. Del teorema anterior se tiene que $\langle f_2 \rangle = \{f_1, f_2, f_3\}$, el cual contiene todas las funciones de frase de rotación. Además, componiendo cualquier función de frase de reflexión con potencias adecuadas de f_2 se obtienen las funciones de reflexión restantes. Por ejemplo,

$$f_2 \circ (-f_2) = -f_1, \quad f_2^2 \circ (-f_2) = -f_3, \quad f_2 \circ (-f_1) = -f_3, \quad f_2^2 \circ (-f_1) = -f_2,$$

y

$$f_2 \circ (-f_3) = -f_2, \quad f_2^2 \circ (-f_3) = -f_1.$$

Por lo tanto, cualquier función de frase de reflexión junto con el generador f_2 produce todas las funciones de reflexión y, en consecuencia, genera el grupo completo $FR(3)$. $\square$

Interacción entre lenguaje, álgebra y geometría

El grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$ ilustra cómo las estructuras lingüísticas, algebraicas y geométricas pueden coexistir dentro de un único marco matemático. Las propias funciones de frase surgen a partir de la organización combinatoria de letras en palabras y frases, mientras que su composición genera una estructura algebraica no abeliana que admite una realización geométrica natural mediante las simetrías del triángulo equilátero.

Aspecto lingüístico: El grupo se origina a partir del arreglo combinatorio de letras de un alfabeto que forman palabras y frases. Dentro de este contexto aparecen naturalmente patrones palindrómicos.

Por ejemplo, $p = f_1 f_2 f_3 (-f_3)(-f_2)(-f_1)$ y $q = (-f_3)(-f_2)(-f_1) f_1 f_2 f_3$ presentan una estructura simétrica en la cual la sucesión de funciones de frase se lee en direcciones opuestas, reflejando la dualidad existente entre rotaciones y reflexiones.

Aspecto algebraico: La composición de funciones de frase dota al conjunto de una estructura de grupo no abeliano constituida por elementos rotacionales de orden tres y elementos de reflexión de orden dos.

Aspecto geométrico: Cada función de frase corresponde a una simetría rotacional o reflexiva del triángulo equilátero, proporcionando así una realización geométrica concreta de la estructura algebraica abstracta.

Esta interacción entre lenguaje, álgebra y geometría convierte a $(FR(3), \circ)$ en un grupo matemáticamente rico y expresivo. Su construcción motiva naturalmente el estudio de sus subgrupos, así como de sus conexiones algebraicas y geométricas con los grupos clásicos de simetría.

Así, $(FR(3), \circ)$ demuestra que incluso el acto elemental de ordenar letras puede generar una rica estructura de simetrías, en la cual el lenguaje, el álgebra y la geometría emergen como distintas manifestaciones de un mismo orden subyacente.

Un retrato visual y geométrico de $FR(3)$

Las construcciones geométricas desarrolladas a lo largo de esta sección culminan en la representación visual mostrada en la Figura 9, la cual resume la estructura algebraica y geométrica del grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$ en un único diagrama unificado.

Las seis funciones de frase del grupo se encuentran organizadas dentro de un hexágono regular de acuerdo con sus realizaciones geométricas como simetrías del triángulo equilátero. Las tres funciones de frase de rotación f_1 , f_2 y f_3 están representadas mediante triángulos equiláteros amarillos que ocupan la mitad superior del diagrama, mientras que las tres funciones de frase de reflexión $-f_1$, $-f_2$ y $-f_3$ están representadas mediante triángulos equiláteros azules que ocupan la mitad inferior. Esta organización hace visible de manera inmediata la diferencia entre transformaciones que preservan la orientación y transformaciones que la invierten.

Puesto que el grupo contiene exactamente seis elementos, el hexágono regular proporciona un marco geométrico natural en el cual cada función de frase ocupa uno de los sectores del diagrama. La construcción resultante puede interpretarse como un retrato geométrico del grupo, traduciendo la estructura algebraica abstracta de $(FR(3), \circ)$ en un objeto plano altamente simétrico.

La posición central del diagrama enfatiza los isomorfismos clásicos

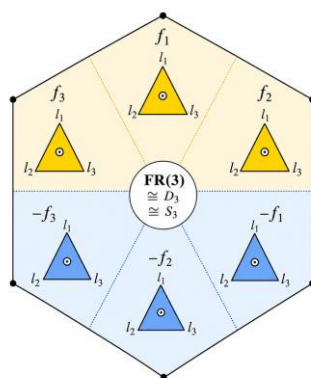
$$FR(3) \cong D_3 \cong S_3,$$

estableciendo una conexión entre el marco de las funciones de frase, el grupo diedral del triángulo equilátero y el grupo simétrico de tres símbolos.

La disposición de las funciones de frase pone de manifiesto la coexistencia de rotaciones y reflexiones dentro de un mismo objeto geométrico, revelando la estrecha relación entre composición algebraica y simetría geométrica que constituye el núcleo del marco de funciones de frase.

Así, el retrato hexagonal proporciona una síntesis visual unificada del origen lingüístico, la estructura algebraica y la realización geométrica del grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$.

Figura 9. Retrato geométrico del grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$



Nota: Los tres sectores amarillos representan las funciones de frase de rotación f_1 , f_2 y f_3 , mientras que los tres sectores azules representan las funciones de frase de reflexión $-f_1$, $-f_2$ y $-f_3$. Cada sector contiene la realización triangular correspondiente de la función de frase asociada. El diagrama proporciona una representación geométrica unificada de los isomorfismos $FR(3) \cong D_3 \cong S_3$.

Fuente: elaboración propia.

Subgrupos del grupo de funciones de frase FR(3)

En esta sección estudiamos la estructura de subgrupos del grupo de funciones de frase FR(3). Debido al isomorfismo $FR(3) \cong D_3 \cong S_3$, se espera que la estructura de subgrupos de FR(3) coincida con la del grupo diedral del triángulo equilátero y con la del grupo simétrico de tres elementos (Armstrong, 1988; Carter, 2009; Fraleigh, 2003).

Además del subgrupo trivial $\{f_1\}$ y del propio grupo FR(3), existen un subgrupo cíclico de orden tres formado por las funciones de frase de rotación y tres subgrupos de orden dos generados por las funciones de frase de reflexión.

El subgrupo de rotaciones ROT(3)

Considérese el subconjunto $ROT(3) = \{f_1, f_2, f_3\}$. El siguiente teorema muestra que ROT(3) constituye un subgrupo de FR(3).

Teorema 12. El conjunto $ROT(3) = \{f_1, f_2, f_3\}$ es un subgrupo cíclico de FR(3) de orden tres.

Demostración. La Tabla 2 muestra que la composición de cualesquiera dos elementos de ROT(3) pertenece nuevamente a ROT(3). Además, la función identidad f_1 pertenece a ROT(3) y los inversos de sus elementos están dados por $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_3$, y $f_3^{-1} = f_2$.

Por lo tanto, ROT(3) es un subgrupo de FR(3).

Además, puesto que $\langle f_2 \rangle = \{f_1, f_2, f_2^2\} = \{f_1, f_2, f_3\}$, se concluye que ROT(3) es un grupo cíclico generado por f_2 y, en consecuencia, $ROT(3) \cong C_3$. $\square$

Para mayor claridad, la composición de las funciones de frase de rotación del subgrupo ROT(3) se resume en la Tabla 3.

Tabla 3. Tabla de composición de las funciones de frase de rotación del subgrupo ROT(3)

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

Fuente: elaboración propia.

Teorema 12. El subgrupo de rotaciones (ROT(3), $\circ$) es cíclico de orden tres y es generado por la función de frase de rotación f_3 . En particular, $\text{ROT}(3) = \langle f_3 \rangle = \{f_1, f_3, f_3^2\}$, donde el exponente denota composición repetida de funciones de frase.

Demostración. Sea $f = l_1l_2l_3$ una frase arbitraria de longitud tres.

Aplicando la función de frase de rotación f_3 una vez se obtiene $f_3(f) = f_3(l_1l_2l_3) = l_2l_3l_1$.

Aplicando f_3 una segunda vez se obtiene $f_3^2(f) = f_3(f_3(f)) = f_3(l_2l_3l_1) = l_3l_1l_2 = f_2(f)$.

Aplicando f_3 una tercera vez obtenemos $f_3^3(f) = f_3(f_3^2(f)) = f_3(l_3l_1l_2) = l_1l_2l_3 = f_1(f)$.

Por lo tanto, $\langle f_3 \rangle = \{f_1, f_3, f_3^2\} = \{f_1, f_2, f_3\} = \text{ROT}(3)$.

En consecuencia, (ROT(3), $\circ$) es un grupo cíclico de orden tres generado por f_3 . $\square$

El subgrupo (ROT(3), $\circ$) constituye la componente rotacional del grupo de funciones de frase FR(3). Algebraicamente, es un grupo cíclico de orden tres generado por f_2 o equivalentemente por f_3 . Geométricamente, sus elementos corresponden precisamente a las simetrías rotacionales del triángulo equilátero.

Corolario 4. El subgrupo de rotaciones (ROT(3), $\circ$) es isomorfo al grupo cíclico C_3 .

Demostración. Del Teorema 12 se sigue que el subgrupo (ROT(3), $\circ$) es un grupo cíclico de orden tres. En particular, $\text{ROT}(3) = \langle f_3 \rangle = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Puesto que todo grupo cíclico de orden tres es isomorfo al grupo cíclico C_3 (Fraleigh, 2003), se concluye que $(\text{ROT}(3), \circ) \cong C_3$. $\square$

Los subgrupos de reflexión

Examinamos ahora los subgrupos de $FR(3)$ generados por las funciones de frase de reflexión.

Considérese el subconjunto $A = \{f_1, -f_1\} \subseteq FR(3)$.

El siguiente teorema muestra que este conjunto forma un subgrupo de $FR(3)$ en el sentido clásico de la teoría de grupos (Fraleigh, 2003).

Para mayor claridad, la composición de los elementos de A se resume en la Tabla 4.

Tabla 4. Tabla de composición de las funciones de frase del subgrupo A

$\circ$	f_1	$-f_1$
f_1	f_1	$-f_1$
$-f_1$	$-f_1$	f_1

Fuente: elaboración propia.

Teorema 13. El subconjunto $A = \{f_1, -f_1\} \subseteq FR(3)$, dotado de la composición de funciones de frase, forma un subgrupo de $FR(3)$.

Demostración. Verificamos los axiomas de grupo.

Clausura. De la Tabla 4 se observa que la composición de cualesquiera dos elementos de A pertenece nuevamente a A . Por lo tanto, $g \circ h \in A$ para todos $g, h \in A$.

Asociatividad. Puesto que los elementos de A son funciones de frase, la asociatividad se sigue directamente de la asociatividad de la composición de funciones.

Elemento identidad. La función de frase f_1 actúa como elemento identidad, ya que $f_1 \circ g = g$ y $g \circ f_1 = g$ para todo $g \in A$.

Inversos. El elemento identidad satisface $f_1 \circ f_1 = f_1$, por lo que f_1 es su propio inverso. Además, la función de frase de reflexión $-f_1$ es una involución, es decir, $(-f_1) \circ (-f_1) = f_1$.

Por lo tanto, todo elemento de A posee un inverso en A . En consecuencia, A satisface todos los axiomas de grupo y, por tanto, forma un subgrupo de $FR(3)$. $\square$

Considérese el subconjunto $B = \{f_1, -f_2\} \subseteq \text{FR}(3)$. Para mayor claridad, la composición de los elementos de B se resume en la Tabla 5.

Tabla 5. Tabla de composición de las funciones de frase del subgrupo B

$\circ$	f_1	$-f_2$
f_1	f_1	$-f_2$
$-f_2$	$-f_2$	f_1

Fuente: elaboración propia.

Teorema 14. El subconjunto $B = \{f_1, -f_2\} \subseteq \text{FR}(3)$, dotado de la composición de funciones de frase, forma un subgrupo de $\text{FR}(3)$.

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del Teorema 13, sustituyendo la reflexión $-f_1$ por $-f_2$. $\square$

Considérese el subconjunto $C = \{f_1, -f_3\} \subseteq \text{FR}(3)$. Para mayor claridad, la composición de los elementos de C se resume en la Tabla 6.

Tabla 6. Tabla de composición de las funciones de frase del subgrupo C

$\circ$	f_1	$-f_3$
f_1	f_1	$-f_3$
$-f_3$	$-f_3$	f_1

Fuente: elaboración propia.

Teorema 15. El subconjunto $C = \{f_1, -f_3\} \subseteq \text{FR}(3)$, dotado de la composición de funciones de frase, forma un subgrupo de $\text{FR}(3)$.

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del Teorema 13, sustituyendo la reflexión $-f_1$ por $-f_3$. $\square$

Corolario 5. El grupo de funciones de frase $\text{FR}(3)$ contiene exactamente tres subgrupos de reflexión de orden dos, a saber, $A = \{f_1, -f_1\}$, $B = \{f_1, -f_2\}$, $C = \{f_1, -f_3\}$.

Cada uno de estos subgrupos es isomorfo al grupo cíclico C_2 .

Demostración. Por los Teoremas 13, 14 y 15, los subconjuntos $A = \{f_1, -f_1\}$, $B = \{f_1, -f_2\}$, $C = \{f_1, -f_3\}$ son subgrupos de $FR(3)$ de orden dos. $\square$

Además, cada subgrupo contiene exactamente un elemento no trivial de orden dos, a saber, $-f_1$, $-f_2$ y $-f_3$, respectivamente. Por lo tanto, cada subgrupo es cíclico y está generado por su elemento no trivial: $A = \langle -f_1 \rangle$, $B = \langle -f_2 \rangle$, $C = \langle -f_3 \rangle$.

Puesto que todo grupo cíclico de orden dos es isomorfo al grupo cíclico C_2 (Fraleigh, 2003), se concluye que $A \cong C_2$, $B \cong C_2$, $C \cong C_2$.

Por consiguiente, $FR(3)$ contiene exactamente tres subgrupos de reflexión de orden dos, cada uno de los cuales es isomorfo al grupo cíclico C_2 . $\square$

El subconjunto unitario $E = \{f_1\}$, dotado de la composición de funciones de frase, constituye el subgrupo trivial de $FR(3)$.

Una consecuencia importante de la estructura de subgrupos de $FR(3)$ es que toda función de frase del grupo puede obtenerse combinando los elementos del subgrupo de reflexión $(B, \circ)$ con los del subgrupo de rotaciones $(ROT(3), \circ)$.

En efecto, la composición de la función identidad f_1 con los elementos de $ROT(3)$ produce todas las funciones de frase de rotación, mientras que la composición de la función de frase de reflexión $-f_2$ con los elementos de $ROT(3)$ produce todas las funciones de frase de reflexión.

Por consiguiente, todo elemento de $FR(3)$ puede expresarse como la composición de un elemento de $ROT(3)$ con un elemento del subgrupo B .

Así, el grupo completo de funciones de frase $FR(3)$ es generado por el subgrupo de rotaciones junto con un único subgrupo de reflexión, reproduciendo la construcción clásica del grupo diedral D_3 (Fraleigh, 2003; Carter, 2009).

Teorema 16. El grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$ es el producto de conjuntos del subgrupo de reflexión B y del subgrupo de rotaciones $ROT(3)$:

$$FR(3) = B \circ ROT(3),$$

donde $B \circ ROT(3) = \{b \circ r \mid b \in B, r \in ROT(3)\}$ denota el producto de conjuntos de B y $ROT(3)$.

Demostración. Considérense los subgrupos $B = \{f_1, -f_2\}$ y $ROT(3) = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Puesto que B contiene dos elementos, la demostración se divide naturalmente en dos casos correspondientes a la composición de cada elemento de B con todos los elementos de $ROT(3)$.

Caso 1. La composición de la función identidad $f_1 \in B$ con cada elemento de $ROT(3)$ produce $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_1 \circ f_2 = f_2$, $f_1 \circ f_3 = f_3$. Por lo tanto, se obtienen todas las funciones de frase de rotación.

Caso 2. La composición de la función de frase de reflexión $-f_2 \in B$ con cada elemento de $ROT(3)$ produce $-f_2 \circ f_1 = -f_2$, $-f_2 \circ f_2 = -f_3$, $-f_2 \circ f_3 = -f_1$. Por consiguiente, se obtienen todas las funciones de frase de reflexión.

Por lo tanto, $B \circ ROT(3) = \{f_1, f_2, f_3, -f_1, -f_2, -f_3\} = FR(3)$.

Además, $|B| = 2$ y $|ROT(3)| = 3$, por lo que el producto de conjuntos contiene exactamente seis elementos, agotando todos los elementos de $FR(3)$.

En consecuencia, $FR(3) = B \circ ROT(3)$. $\square$

De los resultados anteriores se siguen naturalmente varias observaciones.

En primer lugar, los subgrupos B y $ROT(3)$ tienen intersección trivial, es decir, $B \cap ROT(3) = \{f_1\}$.

Además, la composición de dos rotaciones o de dos reflexiones produce una rotación, mientras que la composición de una rotación con una reflexión, o viceversa, produce una reflexión.

Una propiedad estructural adicional de $FR(3)$ es que las funciones de frase de reflexión transforman las funciones de frase de rotación en sus inversas. Este comportamiento reproduce la relación clásica entre rotaciones y reflexiones en los grupos diedrales (Fraleigh, 2003; Carter, 2009) y revela un nivel adicional de simetría interna en $FR(3)$. Esta observación se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 17. Para toda función de frase de reflexión $-f_i$ y toda función de frase de rotación f_j se cumple que $(-f_i) \circ f_j \circ (-f_i) = f_j^{-1}$, donde f_j^{-1} denota el inverso de f_j en el grupo $(FR(3), \circ)$.

Así, la conjugación mediante una función de frase de reflexión envía cada función de frase de rotación a su inversa, reproduciendo la estructura clásica del grupo diedral D_3 (Fraleigh, 2003; Carter, 2009).

Demostración. Puesto que toda función de frase de reflexión tiene orden dos,

$$(-f_i)^{-1} = (-f_i), \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Utilizando la tabla de composición de $FR(3)$ se verifica que la conjugación mediante cualquier función de frase de reflexión fija la rotación identidad e intercambia las dos rotaciones no triviales:

$$(-f_i) \circ f_1 \circ (-f_i) = f_1, (-f_i) \circ f_2 \circ (-f_i) = f_3, \text{ y } (-f_i) \circ f_3 \circ (-f_i) = f_2.$$

Puesto que $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_3$, y $f_3^{-1} = f_2$, se concluye que $(-f_i) \circ f_j \circ (-f_i) = f_j^{-1}$

para toda función de frase de reflexión $-f_i$ y toda función de frase de rotación f_j . $\square$

Estructura algebraica y geométrica de $FR(3)$: un retículo de subgrupos

El grupo de funciones de frase $FR(3)$ exhibe una estructura interna notablemente rica, a pesar de originarse a partir de una construcción combinatoria sencilla basada en funciones de frase definidas sobre tres letras distintas.

Su organización algebraica se vuelve particularmente transparente cuando se visualiza mediante el retículo de subgrupos mostrado en la Figura 10. El diagrama pone de manifiesto la interacción entre el subgrupo de rotaciones $ROT(3)$, los subgrupos de reflexión A , B y C , y el subgrupo trivial $\{f_1\}$, revelando así una arquitectura jerárquica que reproduce la estructura clásica de subgrupos del grupo diedral D_3 (Armstrong, 1988; Carter, 2009; Fraleigh, 2003).

Más allá de su interpretación algebraica, el retículo refleja también una estructura geométrica subyacente. Cada elemento de $FR(3)$ corresponde naturalmente a una simetría del triángulo equilátero. El subgrupo de rotaciones $ROT(3) = \{f_1, f_2, f_3\}$ codifica las permutaciones cíclicas de los vértices, mientras que los subgrupos

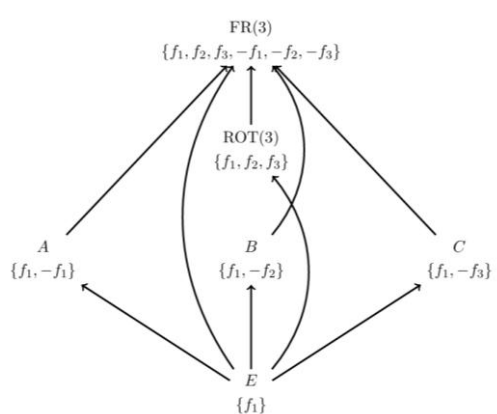
$$A = \{f_1, -f_1\}, B = \{f_1, -f_2\}, C = \{f_1, -f_3\}$$

corresponden a reflexiones respecto a los tres ejes de simetría del triángulo.

Esta interpretación simultáneamente algebraica y geométrica constituye una de las características distintivas del grupo diedral D_3 (Armstrong, 1988; Carter, 2009) y proporciona un puente natural entre las simetrías de funciones de frase y las transformaciones geométricas clásicas.

El retículo de subgrupos resultante proporciona un resumen conciso de la organización algebraica y geométrica de $FR(3)$ y se muestra en la Figura 10.

Figura 10. Retículo de subgrupos del grupo de funciones de frase $FR(3)$



Nota: El diagrama muestra el grupo completo $FR(3)$, el subgrupo de rotaciones $ROT(3)$, los tres subgrupos de reflexión A, B y C, y el subgrupo trivial E. La estructura obtenida coincide con el retículo clásico de subgrupos del grupo diedral D_3 y del grupo simétrico S_3 .

Fuente: elaboración propia.

Realizaciones clásicas de $FR(3)$

La construcción algebraica del grupo de funciones de frase $(FR(3), \circ)$ lo conecta naturalmente con varios grupos clásicos que aparecen en álgebra y geometría. Estas conexiones se establecen mediante isomorfismos explícitos, revelando que muchos grupos de simetría familiares emergen de manera natural dentro del marco de las funciones de frase.

Realización 1. El subgrupo de rotaciones $ROT(3)$ es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}_3$.

Puesto que todo grupo cíclico de orden tres es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$, la realización previa de $\text{ROT}(3)$ como el grupo cíclico C_3 admite la siguiente interpretación aritmética concreta (Fraleigh, 2003; Gallian, 2021).

En álgebra, el conjunto finito $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ de clases de congruencia módulo 3 forma un grupo cíclico bajo la suma módulo 3. La tabla de operación correspondiente se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Tabla de suma del grupo cíclico $(\mathbb{Z}_3, +)$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Fuente: elaboración propia.

Teorema 18. El subgrupo de rotaciones $(\text{ROT}(3), \circ)$ es isomorfo al grupo cíclico $(\mathbb{Z}_3, +)$.

Demostración. Definimos la aplicación $\varphi : \text{ROT}(3) \rightarrow \mathbb{Z}_3$ mediante

$$\varphi(f_1) = 0, \varphi(f_2) = 1, \varphi(f_3) = 2.$$

La aplicación φ es biyectiva, pues establece una correspondencia uno a uno entre las tres funciones de frase de rotación de $\text{ROT}(3)$ y las tres clases de congruencia de $\mathbb{Z}_3$.

Además, para todos $f_i, f_j \in \text{ROT}(3)$, se tiene que $\varphi(f_i \circ f_j) = \varphi(f_i) + \varphi(f_j)$, donde $\circ$ denota la composición en $\text{ROT}(3)$ y $+$ denota la suma módulo 3 en $\mathbb{Z}_3$.

Esto se sigue directamente de la tabla de composición de $\text{ROT}(3)$ y de la tabla de suma de $\mathbb{Z}_3$.

Por lo tanto, φ es un homomorfismo biyectivo y, en consecuencia, un isomorfismo. $\square$

Realización 2. El grupo de funciones de frase $\text{FR}(3)$ es isomorfo al grupo diedral D_3 .

El grupo diedral D_3 es el grupo de simetrías del triángulo equilátero y proporciona el modelo geométrico clásico para el grupo de funciones de frase $\text{FR}(3)$. Como se estableció previamente, $(\text{FR}(3), \circ) \cong D_3$.

Bajo esta correspondencia, las funciones de frase de rotación corresponden a las simetrías rotacionales del triángulo, mientras que las funciones de frase de reflexión corresponden a sus tres simetrías axiales.

Realización 3. El grupo de funciones de frase $FR(3)$ es isomorfo al grupo simétrico S_3 .

El grupo simétrico S_3 está formado por todas las permutaciones de tres símbolos y proporciona la realización combinatoria clásica de $FR(3)$. Como se estableció previamente, $(FR(3), \circ) \cong S_3$.

Bajo esta correspondencia, las funciones de frase de rotación se identifican con las permutaciones pares de tres símbolos, mientras que las funciones de frase de reflexión se identifican con las permutaciones impares. Desde el punto de vista combinatorio, esta identificación conecta el marco de funciones de frase con la teoría clásica de grupos de permutaciones (Cameron, 1999; Dixon y Mortimer, 1996).

Por lo tanto, el marco de funciones de frase admite interpretaciones aritméticas, geométricas y combinatorias mediante los grupos clásicos $\mathbb{Z}_3$, D_3 y S_3 .

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos muestran que las funciones de frase definidas sobre frases formadas por hasta tres letras distintas generan estructuras algebraicas progresivamente más complejas.

El grupo $FR(1)$ constituye el caso trivial, representado geométricamente por un punto y algebraicamente por el grupo trivial de orden uno.

El grupo $FR(2)$ produce una estructura cíclica de orden dos, asociada geométricamente a las simetrías de un segmento y algebraicamente isomorfa a C_2 y $\mathbb{Z}_2$.

El caso $FR(3)$ representa el primer ejemplo no abeliano dentro del marco de funciones de frase. Su estructura algebraica coincide con la del grupo diedral D_3 y, en consecuencia, con la del grupo simétrico S_3 , estableciendo conexiones naturales entre lenguaje, combinatoria, álgebra y geometría.

Uno de los aspectos más relevantes del trabajo es que la estructura de grupo emerge de manera natural a partir de operaciones definidas sobre frases y palabras, mostrando que procesos lingüísticos elementales pueden dar lugar a objetos algebraicos clásicos.

Desde el punto de vista geométrico, las funciones de frase admiten realizaciones visuales mediante puntos, segmentos y triángulos equiláteros, proporcionando interpretaciones intuitivas de conceptos como rotaciones, reflexiones, subgrupos e isomorfismos. La coexistencia de rotaciones y reflexiones dentro de una misma configuración geométrica constituye una característica fundamental de las estructuras de simetría plana (Conway, Burgiel y Goodman-Strauss, 2008).

Asimismo, la aparición de los grupos C_2 , C_3 , $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, D_3 y S_3 dentro del marco de funciones de frase sugiere que esta construcción puede extenderse naturalmente a grupos definidos sobre frases con un mayor número de letras distintas.

En particular, los resultados obtenidos constituyen una motivación natural para el estudio de grupos de funciones de frase de orden superior, tales como $FR(4)$, así como de sus posibles conexiones con estructuras algebraicas y geométricas más generales. Finalmente, el presente trabajo muestra que las funciones de frase proporcionan un marco unificado en el que lenguaje, álgebra y geometría pueden interpretarse como manifestaciones complementarias de una misma estructura matemática subyacente.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se introdujeron y estudiaron los tres primeros grupos de funciones de frase, obtenidos a partir de construcciones combinatorias definidas sobre frases formadas por una, dos y tres letras distintas.

Se demostró que $FR(1)$ corresponde al grupo trivial, mientras que $FR(2)$ constituye un grupo cíclico de orden dos isomorfo a C_2 y $\mathbb{Z}_2$, con una realización geométrica asociada a las simetrías de un segmento.

El principal resultado del trabajo es la caracterización de $FR(3)$ como un grupo no abeliano isomorfo a D_3 y S_3 , junto con la descripción explícita de sus subgrupos, retículo y realizaciones clásicas.

Desde el punto de vista conceptual, los resultados obtenidos muestran que estructuras algebraicas clásicas pueden emerger naturalmente a partir de operaciones definidas originalmente sobre palabras y frases. En este sentido, el marco de las funciones de frase establece un puente entre lenguaje, combinatoria, álgebra y geometría, permitiendo interpretar

estas disciplinas como diferentes manifestaciones de una misma estructura matemática subyacente.

Finalmente, los resultados obtenidos sugieren la posibilidad de extender esta construcción a grupos de funciones de frase definidos sobre un mayor número de letras distintas, lo que abre nuevas líneas de investigación relacionadas con la teoría de grupos finitos, las simetrías geométricas y las aplicaciones interdisciplinarias de las estructuras algebraicas derivadas del lenguaje.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer a su familia y colegas por su apoyo y estímulo a lo largo de este trabajo.

REFERENCIAS

- Armstrong, M. A. (1988). *Groups and Symmetry*. Springer.
- Artin, M. (2011). *Algebra (2nd ed.)*. Pearson.
- Cameron, P. J. (1999). *Permutation Groups*. Cambridge University Press.
- Carter, N. (2009). *Visual Group Theory*. Mathematical Association of America.
- Conway, J. H., Burgiel, H., & Goodman-Strauss, C. (2008). *The Symmetries of Things*. A K Peters.
- Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry (2nd ed.)*. John Wiley & Sons.
- Dixon, J. D., & Mortimer, B. (1996). *Permutation Groups*. Springer.
- Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra (3rd ed.)*. John Wiley & Sons.
- Frleigh, J. B. (2003). *A First Course in Abstract Algebra (7th ed.)*. Addison-Wesley.
- Gallian, J. A. (2021). *Contemporary Abstract Algebra (10th ed.)*. Cengage Learning.
- González Díaz, F. R. (2025). El grupo de funciones de frases $FR(4)$: estructura algebraica, simetría y aplicaciones visuales. *Revista Veritas de Difusão Científica*, 6(2), 6015–6071. <https://doi.org/10.61616/rvdc.v6i2.944>
- González Díaz, F. R., & García Salcedo, R. (2024). Conteo de letras de una frase con los dedos y matrices. *CIENCIA ergo-sum*, 31. <https://doi.org/10.30878/ces.v31n0a19>
- Herstein, I. N. (1975). *Topics in Algebra (2nd ed.)*. John Wiley & Sons.
- Rotman, J. J. (1995). *An Introduction to the Theory of Groups (4th ed.)*. Springer.

Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press.

© Los autores. Este artículo se publica en Prisma ODS bajo la Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0). Esto permite el uso, distribución y reproducción en cualquier medio, incluidos fines comerciales, siempre que se otorgue la atribución adecuada a los autores y a la fuente original.



 : <https://doi.org/10.65011/prismaods.v5.i4.320>

Cómo citar este artículo (APA 7ª edición):

González Díaz, F. R. (2026). Los Tres Primeros Grupos de Funciones de Frases: Estructura Algebraica, Simetría y Realizaciones Geométricas. *Prisma ODS: Revista Multidisciplinaria Sobre Desarrollo Sostenible*, 5(4), 43-76. <https://doi.org/10.65011/prismaods.v5.i4.320>